Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană, Proba de baraj, 28 martie 2016

CLASA a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1

Determinați numerele naturale a și b pentru care ecuațiile

$ay^2+2ay-2x = 1$ și $3bx-y = 2b+2$, cu necunoscutele x și y numere naturale, au exact aceleași soluții.

Soluție:

Cele două ecuații sunt echivalente cu

(1) $a(y^2+2y)=2x+1$

(2) $b(3x-2)=y+2$

Dacă $y=0 \Rightarrow$ (1)$\Leftrightarrow 0=2x+1$ (F)

Dacă $y\neq 0 \Rightarrow$ (1)$\Leftrightarrow a=\frac{2x+1}{y^2+2y}$..***1p***

Deoarece $3x-2\neq 0$, $\forall x\in \mathbf{N}$, (2)$\Leftrightarrow b=\frac{y+2}{3x-2}$.. ***1p***

Din $b\in\mathbf{N} \Rightarrow 3x-2/y+2 \Rightarrow 3x-2/y(y+2)$ (3)

Din $a\in\mathbf{N} \Rightarrow y(y+2)/2x+1$ (4).. ***2p***

Din (3) și (4) $\Rightarrow 3x-2/2x+1$ de unde se deduce că $x\in\{1, 3\}$.. ***1p***

Dacă x=1, atunci y=1, a=1, b=3.. ***1p***

Dacă x=3, ecuația nu are soluții.. ***1p***

Problema 2

a) Arătați că dacă $a,b \in \mathbf{N}^*-\{1\}$ astfel încât $a \geq 3$ sau $b \geq 3$, atunci $a+b < ab$.

b) Se consideră numerele prime distincte p_1, p_2, p_3 și numărul $x=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (p_1+p_2+p_3)$. Demonstrați că x nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) $a \geq 3$, $b \geq 2 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 2 \Rightarrow ab \geq a+b+1 > a+b$.. ***2p***

b) Presupunem prin reducere la absurd că x este pătrat perfect.

Din p_1/x, cum x este pătrat perfect, deducem $p_1^2/x \Rightarrow p_1/p_1+p_2+p_3$.

Analog, $p_2/p_1+p_2+p_3$; $p_3/p_1+p_2+p_3$.. ***1p***

Deoarece p_1, p_2, p_3 sunt prime între ele deducem că $p_1p_2p_3/p_1+p_2+p_3$ $(\neq 0) \Rightarrow p_1+p_2+p_3 \geq p_1p_2p_3$ (1)... ***1p***

Din a), considerând $a=p_1$ și $b=p_2$, rezultă $p_1+p_2<p_1 \cdot p_2$ (2)... ***1p***

Aplicând a) pentru $a=p_1 \cdot p_2$ și $b=p_3$, rezultă $p_1 \cdot p_2+p_3<p_1p_2p_3$ (3)... ***1p***

Din (2) $\Rightarrow p_1+p_2+p_3 < p_1p_2+p_3$ (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow p_1+p_2+p_3<p_1p_2p_3$, în contradicție cu (1)... ***1p***

Problema 3

Se consideră numerele raționale strict pozitive a, b, c și numerele naturale nenule și distincte m și n.

Dacă tripletele $(a^m+b^m, b^m+c^m, c^m+a^m)$ și $(a^n+b^n, b^n+c^n, c^n+a^n)$ sunt direct proporționale cu un același triplet de numere raționale strict pozitive, demonstrați că $a=b=c$.

Soluție:

Din ipoteza problemei rezultă $\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}=\frac{b^m+c^m}{b^n+c^n}=\frac{c^m+a^m}{c^n+a^n}=k$, unde $k>0$.. ***2p***

Presupunem n>m.

$a^m+b^m=k(a^n+b^n) \Rightarrow a^m(1-k \cdot a^{n-m})+b^m(1-k \cdot b^{n-m})=0$

$b^m+c^m=k(b^n+c^n) \Rightarrow b^m(1-k \cdot b^{n-m})+c^m(1-k \cdot c^{n-m})=0$

$c^m+a^m=k(c^n+a^n) \Rightarrow c^m(1-k \cdot c^{n-m})+a^m(1-k \cdot a^{n-m})=0$.. ***2p***

Se arată că $a^m(1\text{-}k\cdot a^{n\text{-}m})=0$

$b^m(1\text{-}k\cdot b^{n\text{-}m})=0$

$c^m(1\text{-}k\cdot c^{n\text{-}m})=0$.. **2p**

Cum $a>0$, $b>0$, $c>0$ rezultă $a^{n\text{-}m}=b^{n\text{-}m}=c^{n\text{-}m} \Rightarrow a=b=c$... **1p**

Problema 4

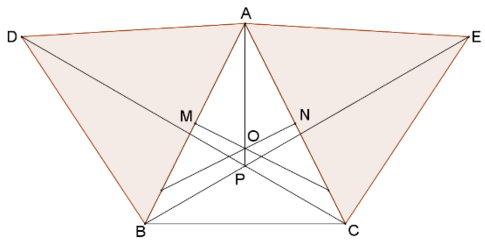
a) Demonstrați că într-un triunghi două laturi sunt congruente dacă și numai dacă unghiurile opuse lor sunt congruente.

b) Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic. Mediatoarele laturilor [AB], [AC] și bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ sunt concurente în punctul O. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABD și ACE iar dreptele CD și BE se intersectează în punctul P. Demonstrați că ΔABC este isoscel și că punctele A, O și P sunt coliniare.

Soluție:

a)... **2p**

b) Se notează cu M și N mijloacele segmentelor [AB], respectiv [AC].



$\Delta AOM \equiv \Delta AON$

(IU)$\Rightarrow AM=AN \Rightarrow 2AM=2AN \Rightarrow AB=AC$... **2p**

ΔABC isoscel$\Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta ACE \Rightarrow m\left(\widehat{ABD}\right) = m\left(\widehat{ACE}\right)$

$$m\left(\widehat{ABC}\right) = m\left(\widehat{ACB}\right)$$

Adunând relațiile membru cu membru, rezultă $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$... **1p**

$\Delta DBC \equiv \Delta ECB(LUL) \Rightarrow \widehat{DCB} \equiv \widehat{EBC} \Rightarrow \Delta PBC$ isoscel $\Rightarrow PB=PC \Rightarrow$

$P \in$ mediatoarei segmentului [BC] (1)..**1p**

$$\left.\begin{array}{l} O \in mediatoarei\ lui\ [AB] \Rightarrow OA = OB \\ O \in mediatoarei\ lui\ [AC] \Rightarrow OA = OB \end{array}\right] \Rightarrow OB = OC \Rightarrow O \in mediatoarei\ lui\ [BC]\ (2)$$

$AB=AC \Rightarrow A \in$mediatoarei lui [BC] (3)

Din (1), (2), (3) resultă că punctele A, O, B sunt coliniare... **1p**